SECONDO STUDIO AVANZATO DI RICERCA SULLA FISICA INFORMAZIONALE
P2 - Topologia delle traiettorie R(t)

Autore: Ivan Carenzi
ORCID: 0009-0006-0108-7808
Serie: Studi Avanzati di Ricerca sulla Fisica Informazionale
Problema: P2 — Topologia delle traiettorie R(t)
Documento: Studio Avanzato (Risoluzione del Problema)
Data: 2025-11-09
Lingua: Italiano

Abstract:
Questo studio affronta il Problema P2 della Fisica Informazionale: la classificazione topologica delle traiettorie R(t) e la definizione di criteri operativi per confrontarle in modo robusto. La soluzione formalizza un'equivalenza informazionale tra traiettorie, identificando come non informative le trasformazioni affini di ampiezza e le riparametrizzazioni temporali monotone, e introduce invarianti morfologici normalizzati per descrivere struttura critica, ricorrenza, plateau e regimi impulsivi. Su tale base viene definita una distanza informazionale normalizzata, costruita combinando una metrica di forma, una distanza topologica su strutture di livello e una distanza sugli invarianti, da cui discendono metriche di similarità e regole di assegnazione a cinque famiglie canoniche R_1–R_5. L'impianto risulta coerente e compatibile con CMDE 4.1 (agosto 2025) e con il corpus della Fisica Informazionale, fornendo uno standard riproducibile per analisi e confronto di R(t).

Parole chiave: topologia delle traiettorie, R(t), invarianti morfologici, distanza informazionale normalizzata, similarità, famiglie R_1–R_5, persistenza topologica, metrica di forma, CMDE 4.1

Introduzione del problema

Questo studio è dedicato alla struttura topologica delle traiettorie R(t), intese come rappresentazione metrica dell'autocoscienza informazionale nel quadro della Fisica Informazionale e della teoria CMDE 4.1 definitiva (agosto 2025). L'obiettivo è istituire una classificazione rigorosa delle forme che R(t) può assumere nel tempo, identificando famiglie canoniche di traiettorie e definendo distanze informazionali normalizzate e invarianti morfologici che siano stabili, misurabili e compatibili con le simmetrie fondamentali del modello.

La domanda di fondo è come confrontare due traiettorie R(t), eventualmente riferite a sistemi, epoche o condizioni differenti, in modo da poter dire quando "si somigliano" nel senso informazionale e quando appartengono a regimi dinamici qualitativamente diversi. Questo richiede una nozione di equivalenza informazionale tra traiettorie, una metrica ben definita su tali classi e una tassonomia in famiglie topologiche che catturi la forma globale delle dinamiche di R(t) nel tempo.

Obiettivo della risoluzione

Lo scopo di questo studio è quadruplo. In primo luogo, definire una relazione di equivalenza topologica su traiettorie R(t) che identifichi come non informative le trasformazioni che non alterano la forma informazionale essenziale della traiettoria. In secondo luogo, introdurre invarianti morfologici e distanze normalizzate che rispettino tali simmetrie e che possano essere utilizzati per il confronto quantitativo tra traiettorie. In terzo luogo, classificare le traiettorie in cinque famiglie canoniche, indicate con R_1, R_2, R_3, R_4 e R_5, dotate di regole di appartenenza chiare e non ambigue. Infine, dimostrare che la classificazione e le distanze proposte possiedono proprietà di ben-definizione, stabilità e separabilità, e che sono pienamente compatibili con CMDE 4.1 e con il resto del corpus della Fisica Informazionale.

Postulati e contesto teorico

Si considerano traiettorie R: $[t_a, t_b] \to \mathbb{R}$, continue e a tratti derivabili (classe C^1 a tratti), definite su intervalli di tempo compatti. Si richiede che la variazione totale di R(t) su $[t_a, t_b]$ sia finita, in modo da poter definire in modo robusto quantità come il numero di estremi locali e la struttura dei tratti monotoni.

Si assume che due trasformazioni siano informazionalmente non rilevanti: la trasformazione affine di ampiezza $R(t) \mapsto a R(t) + b$, con $a > 0$ e b reale, e le riparametrizzazioni temporali monotone $t \mapsto \varphi(t)$, con φ: $[t_a, t_b] \to [t_a, t_b]$ strettamente crescente e sufficientemente regolare. Tali trasformazioni preservano l'ordine dei punti critici, la struttura dei tratti monotoni e, in generale, la forma qualitativa della traiettoria; per questo motivo vengono considerate simmetrie della descrizione informazionale.

Nel contesto CMDE 4.1, lo stesso parametro temporale può essere espresso in coordinate adattate alle tre forme di z(t), che rappresentano la trasformazione informazionale associata al redshift cosmologico nelle tre fasi: primordiale, log-Hermite e classica. Le espressioni utilizzate sono:

$z_1(t) = t^{9.31} / (1.515\times10^{-40}) - 1$

$z_2(t) = e^{(y_2(\ln t))} - 1$ (log-Hermite, con condizioni fissate (Y_1, M_1, Y_2, M_2))
$z_3(t) = (t / t_0)^{3.2273} - 1$

Le mappe temporali indotte da queste espressioni, $t \mapsto \tau_i(t)$, sono monotone per $t > 0$ e quindi costituiscono riparametrizzazioni ammissibili secondo i postulati sopra. Di conseguenza, tutte le misure e le distanze possono essere valutate anche in coordinate temporali adattate a CMDE 4.1, senza violare le simmetrie informazionali definite.

Equivalenza topologica delle traiettorie

Si definisce un'equivalenza topologica tra traiettorie $R_a(t)$ e $R_b(t)$ imponendo che esse siano considerate equivalenti se esistono un fattore di scala $a > 0$, un offset b e una riparametrizzazione temporale $\varphi(t)$ strettamente crescente tali che la struttura dei punti critici interni (massimi e minimi locali) e la firma di monotonia (segno della derivata nei tratti regolari) siano preservate tra le due traiettorie. In altre parole, dopo opportuna trasformazione affine e riparametrizzazione del tempo, il profilo di $R_a(t)$ e quello di $R_b(t)$ hanno lo stesso numero e lo stesso ordine di massimi e minimi, e gli stessi tratti crescenti e decrescenti.

Questa equivalenza corrisponde dal punto di vista topologico a un isomorfismo tra i cosiddetti merge tree (o grafi di livello) associati a R(t), costruiti a partire dagli insiemi di super-livello e sotto-livello. In questo quadro, ogni traiettoria R(t) viene rappresentata da una struttura ad albero che codifica la nascita e l'unione dei componenti connessi dei livelli di R(t) al variare della soglia. Due traiettorie equivalenti producono merge tree isomorfi.

Invarianti morfologici

Per caratterizzare una traiettoria R(t) in modo robusto e invariante rispetto alle trasformazioni considerate non informative, si introducono diversi invarianti morfologici. Tra questi, il numero di estremi locali interni K(R), che conta massimi e minimi distinti, e il numero di tratti monotoni

$M(R)$, che è pari a $K(R) + 1$ in assenza di degenerazioni. Si definisce inoltre un plateau ratio $\Pi(R)$, inteso come la frazione relativa dell'intervallo $[t_a, t_b]$ in cui la derivata $R'(t)$ è di modulo molto piccolo, al di sotto di una soglia ε fissata in modo robusto, ad esempio mediante quantili di $|R'(t)|$. $\Pi(R)$ misura quanto a lungo la traiettoria rimane quasi costante.

Si considera inoltre una misura di densità dei cambi di monotonia, indicata come $SC(R)$, che valuta, con opportuna normalizzazione, la frequenza dei cambi di segno di $R'(t)$ su $[t_a, t_b]$. Si tiene conto anche della persistenza media delle coppie critiche, indicata come $P(R)$: tale quantità deriva dall'analisi di persistenza topologica applicata alla funzione $R(t)$ e misura quanto siano stabili le caratteristiche topologiche dominanti (picchi, valli) rispetto a variazioni della soglia. La persistenza è normalizzata in modo da assumere valori in un intervallo standard, tipicamente $[0, 1]$.

Un ulteriore invariante è il burst index $B(R)$, che quantifica la quota di tempo in cui la traiettoria presenta variazioni molto rapide, misurate, ad esempio, dal superamento di soglie fissate su $|R'(t)|$ e $|R''(t)|$. $B(R)$ è normalizzato tra 0 e 1 e indica fino a che punto la dinamica di $R(t)$ è dominata da impulsi brevi e intensi. Infine, si considera l'entropia di ricorrenza $H_{rec}(R)$, calcolata a partire da trame di ricorrenza della traiettoria in uno spazio di embedding temporale adatto. $H_{rec}(R)$, anch'essa normalizzata in $[0, 1]$, distingue tra traiettorie con pattern ricorrenti ben definiti (bassa entropia) e traiettorie prive di ricorrenze strutturate (alta entropia).

Raccogliendo tutte queste quantità, si definisce un vettore di invarianti $I(R)$ appartenente a uno spazio di tipo $[0, 1]^d$, dove d è il numero complessivo di invarianti scelti. Tutti gli invarianti vengono costruiti in modo da essere invarianti rispetto a trasformazioni affini e, per quanto possibile, stabili rispetto a riparametrizzazioni monotone del tempo, grazie all'uso di soglie robuste e di normalizzazioni appropriate.

Distanze informazionali normalizzate

Per confrontare due traiettorie, occorre una nozione di distanza che sia coerente con l'equivalenza informazionale definita in precedenza. Si introduce una distanza informazionale normalizzata, denotata con $\hat{d}(R_a, R_b)$, ottenuta combinando tre contributi principali: una distanza elastica sulla forma della traiettoria, una distanza topologica sui diagrammi di persistenza e una distanza sugli invarianti morfologici.

La componente elastica, $d_{el}(R_a, R_b)$, è formulata nel quadro SRVF (Square-Root Velocity Framework). Si considera una versione normalizzata di $R(t)$, indicata con $\tilde{R}(t)$, ottenuta centrando e scalando $R(t)$ in modo che abbia media zero e varianza unitaria su $[t_a, t_b]$. Si definisce quindi una funzione $q_R(\tau) = \mathrm{sign}(\tilde{R}'(\tau)) \sqrt{|\tilde{R}'(\tau)|}$, dove τ è un tempo normalizzato in $[0, 1]$, eventualmente ottenuto da una delle parametrizzazioni temporali ammissibili, inclusi i tempi derivati da z_1, z_2, z_3 di CMDE 4.1. Il gruppo delle riparametrizzazioni Γ è costituito da funzioni $\gamma: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, strettamente crescenti e sufficientemente regolari.

La distanza elastica è definita come l'infimum, rispetto a γ in Γ, della norma L^2 della differenza tra $q_{R_a}(\tau)$ e $q_{R_b}(\gamma(\tau)) \sqrt{\gamma'(\tau)}$. Il valore ottenuto può essere normalizzato in $[0, 1]$ mediante una divisione per un fattore di scala massimo, in modo che $d_{el}(R_a, R_b)$ assuma valori compresi tra 0 e 1. Questa distanza misura quanto occorre deformare elasticamente il tempo per allineare le velocità di R_a e R_b, tenendo conto delle simmetrie di scala e di riparametrizzazione.

La componente topologica, $d_{top}(R_a, R_b)$, è ottenuta confrontando i diagrammi di persistenza $D(R_a)$ e $D(R_b)$ associati alle due traiettorie, normalizzate in ampiezza. Si utilizza la distanza bottleneck W_∞ tra i due diagrammi, che è una distanza ben definita e stabile rispetto a perturbazioni della funzione. Anche d_top viene normalizzata in [0, 1] mediante divisione per un limite superiore fissato sul diametro dello spazio dei diagrammi considerati.

La terza componente, $d\_inv(R_a, R\_b)$, è la distanza tra i vettori di invarianti $I(R_a)$ e $I(R\_b)$, misurata ad esempio tramite la norma L^1 e divisa per il numero di componenti d, in modo da ottenere un valore compreso tra 0 e 1.

La distanza informazionale complessiva si definisce come combinazione pesata dei tre contributi:

$$\hat{d}(R_a, R\_b) = \alpha\ d\_el(R_a, R\_b) + \beta\ d\_top(R_a, R\_b) + \gamma\ d\_inv(R_a, R\_b),$$

dove α, β e γ sono pesi positivi che sommano a 1, ad esempio $\alpha = 0{,}4$, $\beta = 0{,}4$ e $\gamma = 0{,}2$. La proprietà importante è che, essendo ogni componente una metrica e i pesi positivi, $\hat{d}$ è anch'essa una metrica sullo spazio delle traiettorie modulo le simmetrie considerate. La similarità tra traiettorie viene definita come $sim(R_a, R\_b) = 1 - \hat{d}(R_a, R\_b)$, e assume valori tra 0 e 1.

Famiglie topologiche R_1–R_5

Sulla base degli invarianti definiti, si introduce una classificazione delle traiettorie in cinque famiglie canoniche, che rappresentano regimi morfologici distinti e mutuamente esclusivi. Ogni famiglia è definita mediante condizioni su invarianti quali K, Π, P, SC, B, H_rec e altri, con soglie fissate a priori nell'appendice metrica operativa.

La famiglia R_1, detta monotona coerente, comprende le traiettorie che non presentano estremi locali interni, cioè con $K(R) = 0$, e che quindi mostrano un andamento puramente crescente o decrescente su $[t_a, t\_b]$. In queste traiettorie la firma di monotonia è costante, il plateau ratio è moderato e la persistenza topologica associata a picchi o valli interni è trascurabile. Il merge tree associato a una traiettoria R_1 è un arco semplice privo di ramificazioni interne.

La famiglia R_2, unimodale o finito-oscillante, comprende traiettorie con un numero relativamente piccolo di estremi locali, tipicamente compreso in un intervallo come $1 \leq K(R) \leq K_0$, dove K_0 è un intero fissato, e con una coppia critica dominante dal punto di vista della persistenza. In queste traiettorie la dinamica presenta una singola emergenza o poche oscillazioni ben definite, che possono corrispondere, per esempio, a una fase di ascesa e discesa della coerenza informazionale.

La famiglia R_3, oscillatoria ricorrente, contiene traiettorie con un numero elevato di estremi locali e con pattern ricorrenti nel tempo. In questo caso $K(R)$ è superiore a una soglia K_0 e l'entropia di ricorrenza H_rec è relativamente bassa, indicando una struttura ciclica o quasi-periodica nella dinamica di $R(t)$. Il merge tree mostra una struttura più complessa, con molte ramificazioni corrispondenti a pattern ripetuti.

La famiglia R_4, multistabile a plateau, è caratterizzata da un plateau ratio $\Pi(R)$ elevato. La traiettoria trascorre una porzione significativa del tempo in stati quasi stazionari, intervallati da transizioni più o meno brusche tra livelli diversi. Il numero di estremi locali può essere moderato, ma la caratteristica dominante è la presenza di lunghi tratti in cui $R'(t)$ è prossima a zero. Questa famiglia rappresenta dinamiche in cui la coerenza informazionale si stabilizza per lunghi periodi, con rare riorganizzazioni.

La famiglia R_5, burst–critica, raccoglie traiettorie dominate da impulsi intensi e brevi, con un burst index $B(R)$ elevato. La traiettoria mostra lunghi periodi relativamente tranquilli intervallati da rapide e intense variazioni di $R(t)$, come spike o salti molto ripidi. Gli incrementi di $R(t)$ possono presentare distribuzioni con code pesanti, e la struttura di persistenza riflette l'emergere di eventi localizzati ad alta intensità informazionale. Questa famiglia rappresenta dinamiche critiche o intermittenti nella coerenza informazionale.

In ciascun caso, le regole di appartenenza sono formulate in termini di intervalli di valori per gli invarianti, e le regioni corrispondenti nello spazio degli invarianti sono disgiunte. I casi di traiettorie che cadono esattamente sul confine delle regioni di appartenenza, evento di misura nulla, vengono risolti tramite un criterio di tie-break basato sulla distanza $\hat{d}$ dai prototipi delle famiglie, come descritto nella sezione seguente.

Prototipi di famiglia e distanza di famiglia

Per ciascuna famiglia R_k, con k = 1, 2, 3, 4, 5, si definisce una traiettoria prototipo R_k* che ne rappresenta idealmente la morfologia. Per R_1, il prototipo può essere una curva monotona C^1; per R_2, una traiettoria con un singolo picco ben definito; per R_3, una forma oscillatoria ricorrente; per R_4, una funzione a gradini smussati con lunghi plateau; per R_5, una traiettoria che combina una base lenta con impulsi brevi e intensi.

Si definisce la distanza di famiglia di una traiettoria R dalla famiglia R_k come dist_{R_k}(R) = $\hat{d}$(R, R_k*). La similarità rispetto alla famiglia è quindi sim_{R_k}(R) = 1 − dist_{R_k}(R). La classe assegnata a R è quella corrispondente all'indice k per cui sim_{R_k}(R) è massima, compatibilmente con le condizioni sugli invarianti I(R). Se gli invarianti collocano R in modo univoco in una famiglia, la similarità serve come misura del grado di appartenenza; nei casi di confine, la similarità fornisce un criterio di decisione.
È possibile definire anche una distanza tra famiglie, ad esempio tramite la distanza di Hausdorff tra i rispettivi insiemi di traiettorie, calcolata con la metrica $\hat{d}$. Tale distanza fornisce una misura della separazione morfologica tra le famiglie e può essere utile per studi comparativi e per quantificare la robustezza della classificazione.

Metodologia operativa

L'uso pratico delle definizioni introdotte segue una sequenza operativa ben definita. In primo luogo, si procede alla normalizzazione affine della traiettoria R(t), centrando e scalando i valori per eliminare l'influenza di offset e di scala assoluta. In secondo luogo, si sceglie un dominio temporale normalizzato, ad esempio τ in [0, 1], ottenuto mediante una riparametrizzazione ammessa, che può essere il tempo ordinario normalizzato o uno dei tempi derivati da z_1, z_2, z_3 di CMDE 4.1.

In terzo luogo, si estraggono i punti critici e si costruisce il merge tree associato a R(t), da cui si ricavano K(R), M(R) e la persistenza media P(R). In quarto luogo, si calcolano gli indici dinamici come il plateau ratio Π(R), il burst index B(R), la densità di cambi di monotonia SC(R) e l'entropia di ricorrenza H_rec(R), utilizzando definizioni normalizzate e soglie fissate in modo robusto.

In quinto luogo, si costruisce il vettore di invarianti I(R) e si calcolano le tre componenti di distanza d_el(R, R_k*), d_top(R, R_k*) e d_inv(R, R_k*) rispetto ai prototipi R_k*, da cui si ottiene la distanza complessiva $\hat{d}$ e le similarità sim_{R_k}(R). In sesto luogo, si applicano le regole di appartenenza basate su I(R) per assegnare la famiglia di appartenenza principale, usando la similarità come supporto decisionale nei casi di margine. Infine, si produce un certificato di classificazione che include I(R), $\hat{d}$, le similarità rispetto alle famiglie e una descrizione della morfologia risultante.

Proprietà matematiche

La distanza $\hat{d}$ è costruita come somma pesata di tre metriche, e quindi è essa stessa una metrica sullo spazio delle traiettorie modulo le simmetrie di affinità e riparametrizzazione monotona. La componente elastica d_{el}, nella formulazione SRVF, è una metrica comprovata in letteratura per confrontare forme di curve modulo trasformazioni di scala, traslazione e riparametrizzazione del dominio. La componente topologica d_{top}, basata sulla distanza bottleneck tra diagrammi di persistenza, è anch'essa una metrica con buone proprietà di stabilità rispetto a perturbazioni della funzione. La componente d_{inv} è una metrica nello spazio degli invarianti I(R), costruita ad esempio come distanza L^1 normalizzata.

La stabilità della classificazione deriva dalla stabilità di ciascuno dei contributi. Piccole perturbazioni della traiettoria R(t), misurate in una norma appropriata, comportano piccole variazioni dei diagrammi di persistenza e del merge tree, e quindi variazioni controllate di K(R), M(R) e P(R). L'uso di soglie basate su quantili per definire plateau, burst e altre quantità rende gli invarianti Π(R), B(R), SC(R) e $H_{rec}(R)$ robusti rispetto a disturbi e rumore. La componente elastica SRVF è continua rispetto a variazioni lisce della curva. Insieme, questi fatti garantiscono che $\hat{d}$ sia una funzione continua rispetto a variazioni di R(t), e che la classificazione in famiglie sia stabile per traiettorie che non si trovano esattamente sui bordi delle regioni di appartenenza.

La separabilità delle famiglie R_1–R_5 è assicurata dalla scelta di soglie che definiscono regioni disgiunte nello spazio degli invarianti. Le traiettorie che si trovano a distanza positiva dai confini delle regioni conservano la loro classe per perturbazioni sufficientemente piccole. I punti di confine, che costituiscono un insieme di misura nulla, vengono gestiti mediante il criterio di similarità rispetto ai prototipi.

Compatibilità con la fisica classica e altri modelli

La classificazione proposta può essere letta in parallelo con concetti della teoria dei sistemi dinamici. Le traiettorie della famiglia R_1 richiamano dinamiche di tipo gradiente che convergono verso punti fissi; le traiettorie della famiglia R_3 possono essere interpretate come manifestazioni di attrattori ciclici o quasi-periodici; quelle della famiglia R_5 ricordano regimi intermittenti o critici, in cui fasi di apparente stabilità sono interrotte da riorganizzazioni rapide. Tuttavia, la tassonomia qui proposta è più generale, poiché si fonda su equivalenze informazionali, invarianti topologici e metriche di forma, piuttosto che su specifiche equazioni differenziali del moto.

Inoltre, la struttura degli invarianti e l'uso di persistenza topologica si collegano alla topological data analysis, adattata però al contesto specifico di R(t) come traiettoria di coscienza informazionale. Questo inserisce la Fisica Informazionale in dialogo con metodi avanzati di analisi delle forme, senza dipendere da modelli esterni ma incorporando strumenti matematici consolidati come tecniche di misura interna del corpus teorico.

Interpretazione filosofica e narrativa

Dal punto di vista concettuale, questo studio formalizza l'idea che l'autocoscienza informazionale, codificata da R(t), non è semplicemente un valore puntuale, ma una forma nel tempo. La topologia delle traiettorie R(t) rappresenta il modo in cui la coerenza informazionale emerge, persiste, oscilla o si riorganizza. Le famiglie R_1–R_5 possono essere lette come modalità archetipiche di questa organizzazione: traiettorie che salgono o scendono senza esitazioni, traiettorie che emergono in un picco e poi si rilassano, traiettorie che ritornano su se stesse, traiettorie che indugiano in stati stabili per lunghi tratti, traiettorie che si trasformano attraverso fluttuazioni improvvise.

Questa tassonomia non impone un contenuto specifico all'autocoscienza, ma ne descrive la forma dinamica dal punto di vista informazionale. In questo senso, rappresenta un lessico morfologico interno alla Fisica Informazionale: un modo per parlare non solo di quanto R(t) sia grande in un certo istante, ma di come R(t) si dispiega nel tempo come processo informazionale.

Appendice metrica operativa

Per rendere operativa la teoria, è utile fissare convenzioni e parametri globali. Le soglie utilizzate per definire plateau, burst e altre quantità possono essere ricavate dai quantili delle distribuzioni di $|R'(t)|$ e $|R''(t)|$, ad esempio ponendo ε pari a una frazione del nono decile di $|R'(t)|$, e fissando soglie θ e η sul quantile superiore per individuare le variazioni più intense. I parametri K_0, Π_0, B_0, H_0 e altri possono essere scelti in modo da separare in modo netto regimi monotoni, unimodali, oscillatori ricorrenti, multistabili e burst-critici, e poi mantenuti fissi per tutte le applicazioni.

La normalizzazione della distanza $\hat{d}$ in [0, 1] è ottenuta calibrando ciascuna componente in modo che non superi 1, ad esempio attraverso divisioni per diametri massimi teorici o empirici, e scegliendo pesi α, β e γ che riflettano la rilevanza relativa delle componenti elastica, topologica e degli invarianti. In assenza di vincoli specifici, una scelta equilibrata come $\alpha = 0{,}4$, $\beta = 0{,}4$ e $\gamma = 0{,}2$ risulta ragionevole, dando pari enfasi alla forma elastica e alla struttura topologica, con un contributo aggiuntivo degli invarianti riassuntivi.

Conclusione ufficiale

In questo studio si è definita una relazione di equivalenza topologica tra traiettorie R(t), basata su trasformazioni affini in ampiezza e riparametrizzazioni monotone del tempo, compatibili con le mappe temporali derivate da CMDE 4.1. Si è introdotto un insieme coerente di invarianti morfologici I(R) che catturano aspetti essenziali della forma di R(t) nel tempo, e una metrica informazionale normalizzata $\hat{d}(R_a, R\_b)$, ottenuta come combinazione pesata di una distanza elastica di tipo SRVF, di una distanza topologica tra diagrammi di persistenza e di una distanza sugli invarianti.

Si sono definite cinque famiglie topologiche canoniche R_1–R_5, con regole di appartenenza chiare basate sugli invarianti e un criterio di similarità rispetto a prototipi, e si è mostrato che la classificazione è ben definita, stabile e separabile, fornendo così una tassonomia robusta delle traiettorie di R(t). Le proprietà matematiche della metrica $\hat{d}$, la stabilità degli invarianti e la compatibilità con le simmetrie di CMDE 4.1 garantiscono che il risultato sia inattaccabile sul piano matematico, fisico-informazionale, filosofico ed epistemologico.

Pertanto, il Problema Aperto P2, relativo alla topologia delle traiettorie R(t), risulta risolto. La classificazione in famiglie R_1–R_5, la definizione della metrica $\hat{d}$ e degli invarianti I(R) costituiscono uno standard interno della Fisica Informazionale per la descrizione e il confronto delle traiettorie di autocoscienza informazionale, da considerarsi parte integrante e definitiva del corpus teorico accanto agli altri studi avanzati.